Hertentamen

Elektriciteit en Magnetisme 1

Woensdag 14 juli 2011

09:00-12:00

Schrijf op *elk* vel uw naam en studentnummer.

Schrijf leesbaar.

Maak elke opgave op een *apart* vel.

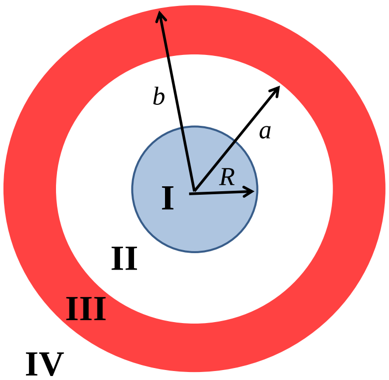
Dit tentamen bestaat uit 4 vragen. Alle vier vragen hebben een gelijk gewicht.

OPGAVE 1

Punten: a+b+c+d+e+f=3+3+3+3+3+3=18

In het centrum van een ongeladen geleidende bolschil met binnendiameter a en buitendiameter b bevindt zich een plastic bol (zie figuur). Deze plastic bol heeft een straal R en een ladingsverdeling

$$\rho(r) = \frac{Q}{2\pi R^2}\frac{1}{r}$$



a) Bewijs dat de totale lading op de plastic bol Q is.

We delen de ruimte op in de volgende vier gebieden (zie figuur):
I: $r \leq R$; II: $R < r < a$; III: $a \leq r \leq b$; en IV: $r > b$.

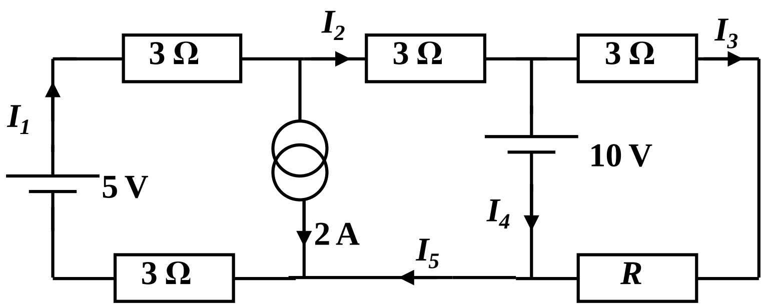
b) Bereken het elektrische veld $\vec{E}$ in de gebieden I, II, III en IV.
c) Bereken de potentiaal in het centrum van de plastic bol. Veronderstel hierbij dat de potentiaal in het oneindige nul is.

Gebied II wordt nu opgevuld met een lineair diëlektricum met relatieve diëlektrische constante ε_r.

d) Bereken het elektrische veld $\vec{E}$ in de gebieden I, II, III en IV.
e) Bereken de polarisatie $\vec{P}$ in het gebied II.
f) Bereken zowel de gebonden volumeladingsdichtheid als de gebonden oppervlakteladingsdichtheid van het diëlektricum

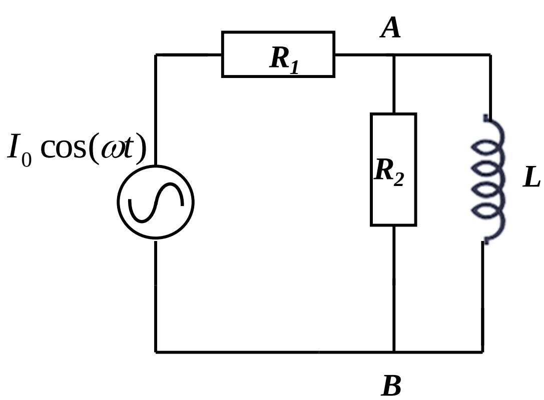
OPGAVE 2
Punten: a+b+c+d+e=4+3+4+4+3=18

Gegeven is de getekende schakeling.



a) Geef alle vergelijkingen voor de knopen (Kirchhoff 1). Laat zien dat één van deze vergelijkingen uit de andere vergelijkingen afgeleid kan worden.
b) Geef alle vergelijkingen voor de mazen (Kirchhoff 2).
c) Gegeven is dat $I_4 = -2$ A. Bereken de waarde van de weerstand R.

Gegeven is de hieronder getekende schakeling voor een stationaire wisselstroombron die in de reële schrijfwijze beschreven wordt door $I = I_0 \cos(\omega t)$.



d) Geef de spanning $V_{AB} = V_B - V_A$ over de weerstand R_2 in de complexe schrijfwijze.
e) Geef de spanning $V_{AB} = V_B - V_A$ over de weerstand R_2 in de reële schrijfwijze.

OPGAVE 3

Punten: a+b+c+d=5+5+5+3=18

In het xy-vlak ligt een oneindige plaat (zie onderstaande figuur, links). Over deze plaat loopt een oppervlaktestroom $\vec{K} = K\hat{y}$. In onderstaande vragen mag worden verondersteld dat de dikte (z-richting) van de plaat zo klein is dat deze dikte geen rol speelt.

a) Bereken met behulp van de wet van Ampère het magnetisch veld $\vec{B}$ onder en boven de plaat.

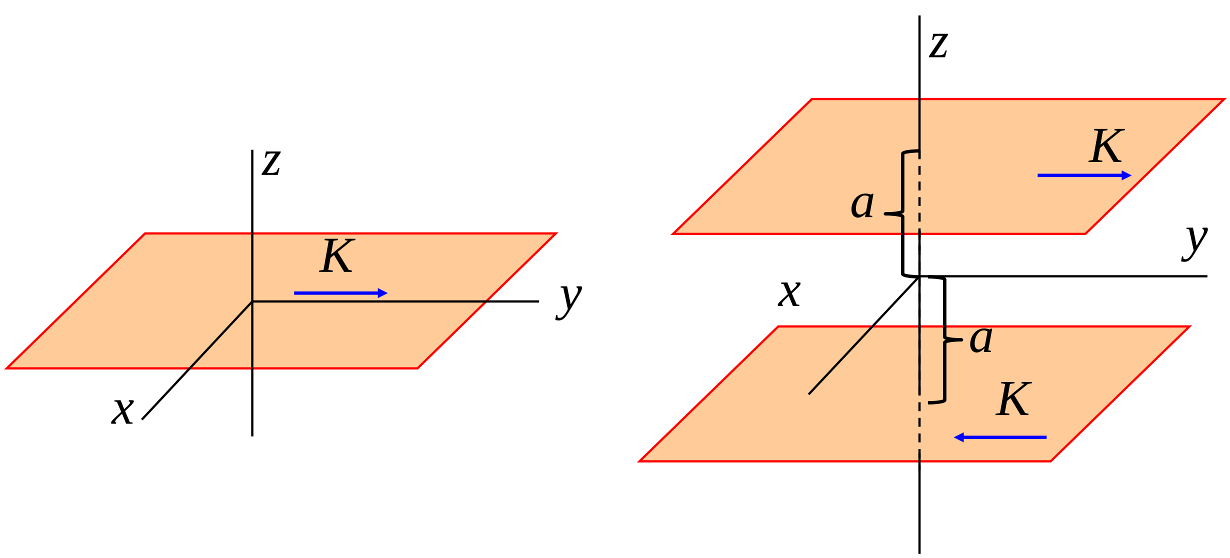
We beschouwen nu twee van dergelijke platen die evenwijdig met het xy-vlak georiënteerd zijn (zie onderstaande figuur, rechts). De bovenste plaat snijdt de z-as op het punt $z = a$, de onderste plaat op het punt $z = -a$. Over de bovenste plaat loopt een oppervlaktestroom $\vec{K} = K\hat{y}$ en over de onderste plaat een stroom $\vec{K} = -K\hat{y}$.

b) Bereken het magnetisch veld $\vec{B}$ buiten de platen ($z > a$ en $z < -a$) en binnen de platen ($-a \leq z \leq a$).

De ruimte tussen de platen wordt nu geheel gevuld met een lineair diamagnetisch materiaal met magnetische susceptibiliteit χ_m.

c) Bereken het (hulp)veld $\vec{H}$ en het magnetisch veld $\vec{B}$ binnen de platen ($-a \leq z \leq a$). Neemt de grootte van het magneetveld toe of af tengevolge van de aanwezigheid van het diamagnetische materiaal?

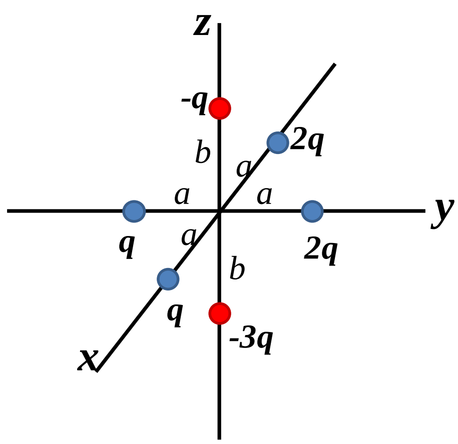
d) Bereken de gebonden stroom over de oppervlakken van het diamagnetische materiaal op $z = a$ en $z = -a$.



OPGAVE 4

Punten: a+b+c+d+e =4+3+4+4+3

We beschouwen een ladingsverdeling (zie figuur) die bestaat uit: twee positieve ladingen ter grootte q op (0, -a, 0) en op (a, 0, 0); twee positieve ladingen ter grootte 2q op (0, a, 0) en op (-a, 0, 0) en een negatieve lading van -3q op (0, 0, -b) en een negatieve lading van –q op (0, 0, b).



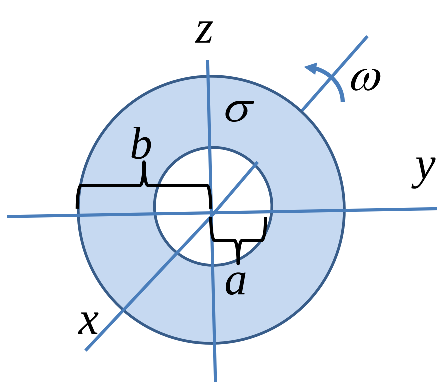
a) Bereken de arbeid die je moet verrichten om deze ladingsverdeling te maken. Druk je antwoord uit in de lading q en de afstanden a en b.

b) Bereken het elektrisch monopool- en dipoolmoment van deze ladingsverdeling.

c) Geef de wet van Gauss voor het elektrische veld $\vec{E}$ in integrale vorm en leid hieruit de wet van Gauss in differentiële vorm af.

d) Beschrijf in niet meer dan 200 woorden de begrippen paramagnetisme, diamagnetisme en ferromagnetisme.

e) Bepaal het magnetisch dipoolmoment van een schijf met oppervlakteladingsdichtheid σ, binnenstraal a en buitenstraal b. De schijf draait (tegen de klok in) om de x-as met hoeksnelheid ω.



Uitwerkingen

Opgave 1)
Onderdeel a)

De totale lading op de plastic bol is:

$$\int_0^R \rho(r)4\pi r^2\,dr = \frac{4\pi Q}{2\pi R^2}\int_0^R r\,dr = \frac{2Q}{R^2}\frac{1}{2}R^2 = Q$$

Onderdeel b)

Gebruik de wet van Gauss voor een bolvormig Gaussoppervlak met straal r. Merk op dat we bolsymmetrie hebben en dat alle velden in de $\hat{r}$-richting zijn.

Gebied I:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = 4\pi r^2 E = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho(\acute{r})4\pi\acute{r}^2\,d\acute{r} = \frac{4\pi Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\int_0^r \acute{r}\,d\acute{r} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{r^2}{R^2}$$

Dus $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{R^2}$

Gebied II:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = 4\pi r^2 E = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Dus $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$

Gebied III:
Dit is een geleider dus $\vec{E} = 0$

Gebied IV: De geleider is ongeladen dus de omsloten lading blijft Q. Het elektrische veld is dan (idem aan gebied II) $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$.

Onderdeel c)

Werk van buiten naar binnen:

$$V(r=0) = -\int_\infty^0 E\,dr = -\int_\infty^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dr - \int_b^a 0dr - \int_a^R \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dr - \int_R^0 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}dr \Rightarrow$$

$$V(r=0) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{b} - \frac{1}{R} + \frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} + \frac{2}{R}\right)$$

Onderdeel d)

Gebied I: geen verandering (zelfde afleiding als onder onderdeel b), $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{R^2}$

Gebied II: gebruik wet van Gauss voor het $\vec{D}$-veld,

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = 4\pi r^2 D = Q_{enc} = Q \Rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{4\pi}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

En dus $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{\hat{r}}{r^2}$

Gebied III: geen verandering (veld in geleider is nul), $\vec{E} = 0$

Gebied IV: geen verandering (zelfde afleiding als onder onderdeel b), $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$

Onderdeel e)

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{Q}{4\pi}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

Onderdeel f)

Voor de ruimtelading ρ_b vinden we:

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{r^2}\right) = 0$$

Voor de oppervlakte lading σ_b vinden we:

$$\sigma_b(r = a) = \vec{P} \cdot \hat{n} = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{Q}{4\pi}\frac{\hat{r}}{a^2} \cdot (\hat{r}) = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{Q}{4\pi a^2}$$

En

$$\sigma_b(r = R) = \vec{P} \cdot \hat{n} = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{Q}{4\pi}\frac{\hat{r}}{R^2} \cdot (-\hat{r}) = \frac{-(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\frac{Q}{4\pi R^2}$$

Opgave 2)
Onderdeel a)

Er zijn vier knopen. De vergelijkingen zijn:

K1: $I_1 - I_2 - 2 = 0$
K2: $I_2 - I_4 - I_3 = 0$
K3: $I_3 + I_4 - I_5 = 0$
K4: $I_5 + 2 - I_1 = 0$

We laten zien dat K2 volgt uit de andere 3.

K1+K4: $I_1 - I_2 - 2 + I_5 + 2 - I_1 = 0 \Rightarrow I_2 = I_5$
Dit invullen in K3 levert K2.

Onderdeel b)
Belangrijk hier is dat de stroombron weggelaten kan worden voor het opstellen van de maasvergelijkingen. Er blijven dan twee mazen over en die geven (met de klok mee):

M1: $5 - 3I_1 - 3I_2 - 10 - 3I_1 = 0 \Rightarrow -5 - 6I_1 - 3I_2 = 0$
M2: $10 - (3 + R)I_3 = 0$

Onderdeel c)
Uit K1 volgt $I_1 = 2 + I_2$. Dit invullen in M1 levert
$-5 - 6(2 + I_2) - 3I_2 = 0 \Rightarrow -17 - 9I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = -\frac{17}{9}$ A. En dus $I_1 = \frac{1}{9}$ A en
$I_5 = -\frac{17}{9}$ A (met K4).
Met K3 en het gegeven dat $I_4 = -2$ A vinden we $I_3 = \frac{1}{9}$ A.
Dit invullen in M2 geeft dan $10 - \frac{1}{9}(3 + R) = 0 \Rightarrow R = 87\ \Omega$

Onderdeel d)
Kies stroom I_1 door weerstand R_2 naar beneden en stroom I_2 door de spoel naar beneden dan,

K1: $I_0 = I_1 + I_2$

Er is maar één maas omdat de tak met de stroombron weggelaten kan worden dus:

M1: $I_1 R_2 - I_2 Z_L = 0$

Dus $I_2 = I_1 \frac{R_2}{Z_L}$ en
(met K1) $I_1 = I_0 \frac{1}{1+\frac{R_2}{Z_L}}$

Er geldt $V_{AB} = -I_1R_2 = -I_0\frac{R_2}{1+\frac{R_2}{i\omega L}} = -I_0\frac{R_2}{1-i\frac{R_2}{\omega L}}$

Dit is de spanning in de complexe schrijfwijze.

Onderdeel e)

$$|V_{AB}| = I_0\frac{R_2}{\sqrt{1+\left(\frac{R_2}{\omega L}\right)^2}}$$

En

$$\arg(V_{AB}) = \arg(-I_0R_2) - \arg\left(1 - i\frac{R_2}{\omega L}\right) = \pi - \tan^{-1}\left(-\frac{R_2}{\omega L}\right)$$

Dus

$$V_{AB} = I_0\frac{R_2}{\sqrt{1+\left(\frac{R_2}{\omega L}\right)^2}}\cos(\omega t+\varphi)$$

Met $\varphi = \pi - \tan^{-1}\left(-\frac{R_2}{\omega L}\right)$

Opgave 3)

Onderdeel a)
Wegens plaatsymmetrie en met de rechterhandregel geldt dat het magnetische veld boven de plaat in de $+\hat{x}$-richting is en onder de plaat in de $-\hat{x}$-richting. Maak nu een Ampèrelus die onder en boven de plaat ligt en waarvan het oppervlak loodrecht op de stroomrichting staat. De zijden loodrecht op de stroomrichting hebben lengte l. Dan met de wet van Ampere in integrale vorm:

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bl + Bl = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 K l$ dus

Voor $z > 0$: $\vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0 K\hat{x}$ en voor $z < 0$: $\vec{B} = -\frac{1}{2}\mu_0 K\hat{x}$

Onderdeel b)
Gebruik superpositie en realiseer dat de velden onder en boven de onderste plaat precies andersom zijn als die van de bovenste plaat omdat de stroom hier de andere kant opgaat.

Voor $z > a$: $\vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0 K\hat{x} - \frac{1}{2}\mu_0 K\hat{x} = 0$
Voor $-a < z < a$: $\vec{B} = -\frac{1}{2}\mu_0 K\hat{x} - \frac{1}{2}\mu_0 K\hat{x} = -\mu_0 K\hat{x}$
Voor $z < a$: $\vec{B} = -\frac{1}{2}\mu_0 K\hat{x} + \frac{1}{2}\mu_0 K\hat{x} = 0$

Onderdeel c)
Het hulpveld $\vec{H}$ kunnen we bepalen door een Ampèrelus te beschouwen die onder (in het lineaire diamagneticum) en boven de bovenste plaat ligt en waarvan het oppervlak loodrecht op de stroomrichting staat. We gebruiken nu de wet van Ampere voor het $\vec{H}$-veld. Merk op dat voor deze situatie $\vec{H}$, $\vec{B}$ en ook $\vec{M}$ allen in de *x*-richting wijzen.

$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 + Hl = I_{enc} = Kl$

De eerste term van het tweede lid is nul omdat er buiten de platen geen materiaal is dat gemagnetiseerd kan worden en is de magnetisatie daar nul en dus ook *H* ($\vec{H} = \frac{\vec{M}}{\mu_0}$)
En we vinden $\vec{H} = -K\hat{x}$.

Hieruit volgt $\vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = -\mu_0(1+\chi_m)K\hat{x}$

De grootte neemt af omdat voor een diamagnetisch materiaal $\chi_m < 0$.

Onderdeel d)

$$\vec{K}_b(z=a) = \vec{M} \times \hat{n} = \chi_m \vec{H} \times \hat{z} = -\chi_m K\hat{x} \times \hat{z} = \chi_m K\hat{y}$$
$$\vec{K}_b(z=-a) = \vec{M} \times \hat{n} = \chi_m \vec{H} \times -\hat{z} = \chi_m K\hat{x} \times \hat{z} = -\chi_m K\hat{y}$$

Opgave 4)

Onderdeel a)

We beginnen met de positieve ladingen en met de lading op de positieve *x*-as en dan met de klok mee:

Lading q: $W_0 = 0$;
Lading q: $W_1 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a\sqrt{2}}$
Lading $2q$: $W_2 = \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a\sqrt{2}} + \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2a}$
Lading $2q$: $W_3 = \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a\sqrt{2}} + \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2a} + \frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a\sqrt{2}}$

En dan de negatieve lading boven het *xy*-vlak:

Lading ($-q$): $W_4 = 2\left(-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + 2\left(-\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

En tenslotte de negatieve lading onder het *xy*-vlak:

Lading (-3q): $W_5 = 2\left(-\frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + 2\left(-\frac{6q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2b}$

Alles sommeren levert:

$$W_{tot} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{9}{a\sqrt{2}} + \frac{2}{a} + \frac{3}{2b} - \frac{24}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Onderdeel b)

Elektrisch monopoolmoment: $Q = q + q + 2q + 2q - q - 3q = 2q$

Elektrisch dipoolmoment: $\vec{p} = qa\hat{x} - 2qa\hat{x} + 2qa\hat{y} - qa\hat{y} - qb\hat{z} + 3qb\hat{z} \Rightarrow$

$$\vec{p} = -q(a\hat{x} - a\hat{y} - 2b\hat{z})$$

Onderdeel c)

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho d\tau = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dt$$

En dus $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Onderdeel d)
Diamagnetisch materiaal: atomen krijgen extra magnetisch dipoolmoment tgv extra snelheid (door het aangelegde magneetveld) van electronen in hun orbital. Effect is tegengesteld aan het aangelegde veld.
Paramagnetisch materiaal: Magnetische dipolen tgv spinnende elektronen richten zich in de richting van het aangelegde magneetveld.
Ferromagentisme: Atomaire dipolen richten zich tgv een QM effect. In een ferromagnetisch materiaal staan alle dipolen in kleine gebiedjes (domeinen; Weissgebiedjes) in dezelfde richting. Echter de richtingen die heersen in de verschillende gebiedjes zijn random. Door een extern magneetveld aan te leggen gaan de dipolen in alle gebiedjes zich richten in de richting van het veld en ontstaat een permanente magneet.

Onderdeel e)
Maak cirkelvormige strippen over de schijf met dikte *dr*.
De grootte van het dipoolmoment van een dergelijke strip met straal *r* (afstand van het centrum van de schijf) is,

$$dm = I(r)\pi r^2 = \sigma\omega r dr \pi r^2 = \sigma\omega\pi r^3 dr$$

De straal van de schijf loopt van *a* naar *b* dus de grootte van het magnetisch dipoolmoment is,

$$m = \int dm = \int_a^b \sigma\omega\pi r^3 dr = \frac{1}{4}\sigma\omega\pi(b^4 - a^4)$$

De richting van het magnetisch dipoolmoment is de *x*-richting (rechterhandregel. Dus

$$\vec{m} = \frac{1}{4}\sigma\omega\pi(b^4 - a^4)\hat{x}$$